

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

رياضى عمومى ۱

به نام خدا

درس ریاضی عمومی (۱) و ریاضی پایه

مباحث

۱- حد و پیوستگی ✓

۲- مشتق و کاربرد آن

۳- انتگرال و کاربرد آن

فصل اول در کلاس درس داده شده است

فصل دوم - مشتق و کاربرد آن

تعریف مشتق: مشتق به معنای تغییرات یک متغیر نسبت

متغیر دیگر وقتی که تغییرات متغیر دیگر یعنی مشتق نزدیک به صفر

متغیر مستقل را محرم با x و متغیر وابسته را y می نامند

بنابراین $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، y' مشتق متغیر y

نسبت به متغیر x می گویند

قواعد مشتق

۱) مشتق تابع ثابت همواره صفر است.

مقدار ثابت $y = c \implies y' = 0$

سؤال: اگر $y = 2$ آن گاه $y' = 0$

۲) مشتق تابع $y = x^n$ برابر است با $y' = nx^{n-1}$

سؤال: اگر $y = x^5$ آن گاه $y' = 5x^4$

سؤال: اگر $y = x$ آن گاه $y' = 1$

سؤال) $y = \frac{1}{x^{10}} = x^{-10} \implies y' = -10x^{-10-1} = -10x^{-11}$

سؤال) $y = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}} \implies y' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$

سؤال) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \implies y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

سؤال) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{-\frac{1}{4}} \implies y' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1}$
 $\implies y' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$

$$y = k f(x) \Rightarrow y' = k f'(x)$$

← عدد ثابت

□۱

مثال) $y = 2x^7 \Rightarrow y' = 2(7x^6) = 14x^6$

به عبارت دیگر عدد ثابت اگر به صورت ضریب باشد بدون تغییر باقی می ماند

□۲ مشتق حاصل جمع و یا تفاضل در تابع برابر است مشتق تک

عبارت ها با قید علامت ها

مثال) $y = 3x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 11x - 9$

$$y' = 3(5x^4) + 4(3x^2) - 8(2x) + 11(1) -$$

$$y' = 15x^4 + 12x^2 - 16x + 11$$

۵) مشتق حاصلضرب دو عبارت برابری با مشتق عبارت اول

در خود عبارت دوم به علاوه مشتق عبارت دوم در خود عبارت اول

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

f و g دو عبارت یا دو تابع دلخواه هستند

$$\text{سؤال } y = (4x^5 - 11x) (4x^7 - 9x^2 + 1)$$

$$\text{جواب } y' = (20x^4 - 11)(4x^5 - 11x) + (30x^6 - 1)(4x^7 - 9x^2 + 1)$$

۶] مشتق تقسیم دو عبارت برابرات با مشتق عبارت صورت

در خود خارج میهای مشتق عبارت خارج در خود صورت همگی

تقسیم بر مربع خارج

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$y = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{4x^5 - 9x}$$

مثال:

$$\text{جواب } y = \frac{(6x^2 - 2x + 0)(4x^5 - 9x) - (20x^4 - 9)(2x^3 - x^2 + 1)}{(4x^5 - 9x)^2}$$

مثال ۵

$$(u^n)' = nu' u^{n-1} \quad \boxed{7} \text{ متن عبارت توان دار}$$

u عبارتی که متن عبارت

مثال) $y = (8x^5 - 3x + 12)^{10}$

جواب $y' = 10(40x^4 - 3)(8x^5 - 3x + 12)^9$

$\boxed{8}$ متن عبارت رادیکالی

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

مثال) $y = \sqrt[3]{x^5 - 4x^2 + 11x + 3}$

$$y' = \frac{5x^4 - 8x + 11}{3 \sqrt[3]{(x^5 - 4x^2 + 11x + 3)^2}}$$

$$\boxed{7} \text{ متن عبارت توان دار: } (u^n)' = nu' u^{n-1}$$

u عبارتی در قوس متن عبارت

مثال) $y = (8x^5 - 3x + 12)^{10}$

جواب $y' = 10(56x^4 - 3)(8x^5 - 3x + 12)^9$

$\boxed{8}$ متن عبارت رادیکالی

$$\left(\frac{n}{\sqrt[n]{u}}\right)' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

مثال) $y = \sqrt[3]{x^5 - 4x^2 + 11x + 3}$

$$y' = \frac{5x^4 - 8x + 11}{3 \sqrt[3]{(x^5 - 4x^2 + 11x + 3)^2}}$$

10. مشتق توابع نمایی

الف) $y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u$

مثال) $y = e^{4x^2 - 1x} \Rightarrow y' = (8x - 1) e^{4x^2 - 1x}$

ب) $y = a^u \Rightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$

a عدد ثابت، u متغیر

مثال) $y = 2^{4x^2 - 1x} \Rightarrow y' = (8x - 2) 2^{4x^2 - 1x} \cdot \ln 2$

11. مشتق توابع مثلثاتی

الف) $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$

مثال) $y = \sin(4x - 1) \Rightarrow y' = 4 \cos(4x - 1)$

ب) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$

مثال) $y = \cos x \Rightarrow y' = -1 \sin x$

ج) $y = \tan u \Rightarrow y' = u' (1 + \tan^2 u)$

مثال) $y = \tan(2x) \Rightarrow y' = 2(1 + \tan^2 2x)$

مثال) $y = \cot(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \cot^2 \sqrt{x})$

د) $y = \cot u \Rightarrow y' = -u' (1 + \cot^2 u)$

کاربرد مشتق

- ۱) صعودی و نزولی بودن تابع در نقاط \min و \max در برابری
- ۲) مقعر و محدب بودن تابع در نقاط عطف


۱) صعودی و نزولی بودن تابع :

قاعده: اگر مشتق تابع در یک فاصله مثبت + باشد تابع در آن فاصله صعودی و اگر منفی - باشد تابع نزولی است


	a	b	c
$f'(x)$	-	+	-
f			

↘ نزولی
↗ صعودی
↘ Max

نقطه Max از حالت صعودی به نزولی تبدیل می شود



نقطه Min از حالت نزولی به صعودی تبدیل می شود



صاف شدن

ما برای بررسی صدوری و نزولی بودن نقاط \min, \max کنی
 کافی است مشتق تابع را محاسبه نموده و سپس تعیین علامت
 کنیم هر جا مشتق مثبت بود تابع صعودی \nearrow و هر جا مشتق
 منفی بود تابع نزولی \searrow خواهد بود

مثال: صدوری و نزولی بودن تابع در فاصله ما را با \min, \max کنی
 را مشخص کنی

الف $y = x^2 - 2x + 1$

ب $y = x^3 - 12x + 4$

ج حل الف $y' = 2x - 2 = 0 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

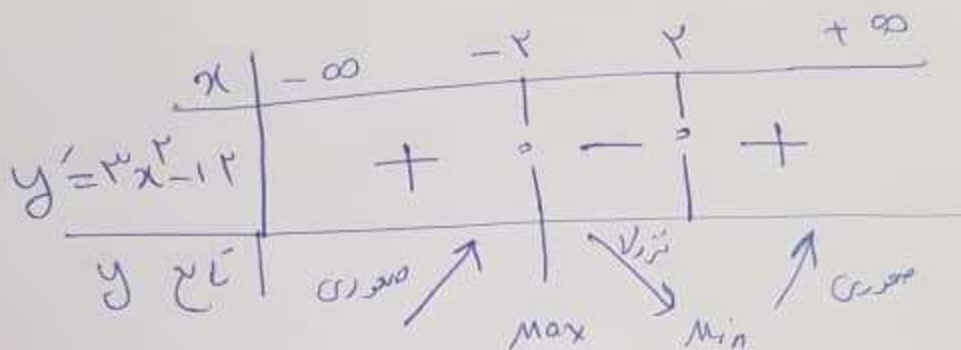
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$y' = 2x - 2$		$-$	$+$
تابع y		\searrow نزولی Min \nearrow صعودی	

صغیر ۱۰

$$\rightarrow y = x^3 - 12x + 4$$

$$y' = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$



تمرین: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$الف) y = (5x^9 - 1x)(\sqrt{x} - 4)$$

$$ب) y = (12x^{10} - 11x^9 - 14)^{10}$$

$$ج) y = \sqrt[3]{x^9 - 9x}$$

$$د) y = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{14x - 11}$$

$$ه) y = \frac{5}{x} - \frac{9}{x^2} + \sqrt{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$و) y = \ln(\sqrt{x} + 4x) \\ 12x^2 - \sqrt{x} + 10$$

$$ز) y = e$$

$$ح) y = \sin x - 4 \cos^2 x + \tan(\sqrt{x} + 11)$$

$$ط) y = \frac{\sin^3 x - \cot x}{\cos x}$$

$$ث) y = 2$$

$$ج) y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

موفق باشید

موفق باشید