

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

رياضى عمومى ۲

ریاضی عمومی ۲ در باطنی و خارج دکان در صورت (۲)

انترال ← {  
(۱) مفهوم انترال نامعین  
(۲) فرمول های انترال نامعین  
(۳) روش های انترال گیری  
(۴) انترال های دو جانبه در سه طاقه

(۱) مفهوم انترال نامعین: برعکس مشتق است در انترال ما به دنبال پیدا کردن تابع هستیم که مشتق آن با عبارت زیر انترال برابر باشد

مثال:  
$$\int 3x^2 dx = ?$$

چه تابعی مشتق آن  $3x^2$  است متصفاً  $x^3$  است پس  
جواب انترال  $x^3 + C$  است توهم داشته باشیم که  $C$  مقدار ثابت  
مشتق آن مفزات  $\leftarrow$  جواب  $\leftarrow$

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

در طبع انترال معای نامعین مقدار ثابت  $C$  نوشته می شود

طر

مجموعه‌های انتگرال

مثال

درجه	تابع	انتگرال	مثال
1	$x^n$ $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$
2	$k$ $\frac{1}{k}$	$kx + c$	$\int 2 dx = 2x + c$
3	$e^{kx}$ $\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k} e^{kx} + c$	$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$
4	$a^x$ $\frac{1}{\ln a}$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$
5	$\frac{u'}{u}$	$\ln  u  + c$	$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln  x^2+1  + c$
6	$\sin kx$	$-\frac{1}{k} \cos kx + c$	$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$
7	$\cos kx$	$\frac{1}{k} \sin kx + c$	$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$
8	$\tan kx$	$-\frac{1}{k} \ln  \cos kx  + c$	$\int \tan 2x dx = -\frac{1}{2} \ln  \cos 2x  + c$
9	$\cot kx$	$\frac{1}{k} \ln  \sin kx  + c$	$\int \cot 2x dx = \frac{1}{2} \ln  \sin 2x  + c$

## روش های انتگرال گیری

الف) روش تغییر متغیر در این روش عبارتی را در داخل انتگرال به عنوان متغیر جدید یا تعریف می کنیم و سعی می کنیم عبارت داخل انتگرال را با متغیر جدید یا باز نویسی کنیم و نکته قابل ذکر این است که عبارتی را به عنوان تغییر متغیر انتخاب می نمایم که مشتق آن در داخل انتگرال دیده شود یا تماماً یا جزئی آن.

سوال ۱

$$\int 3x^2 (x+1)^{10} dx$$

$t$  تغییر متغیر

$$t = x^3 + 1 \xrightarrow[\text{یا مشتق}]{\text{دifferans}} dt = 3x^2 dx$$

باز نویسی انتگرال با متغیر جدید  $t$

$$\int t^{10} dt = \frac{t^{11}}{11} + C$$
$$= \frac{(x+1)^{11}}{11} + C$$

$$\int x^5 (x^3 + 2)^4 dx$$

سوال ۱

$$\text{توضیح } t = x^3 + 2 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

$$\int x^2 (x^3 + 2)^4 \frac{dt}{3}$$

$$t = x^3 + 2$$

$$x^3 = t - 2$$

جایگزینی مجدد با متغیر جدید  $t$

$$\int (t-2) t^4 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int (t-2) t^4 dt$$

$$= \frac{1}{3} \int (t^5 - 2t^4) dt = \frac{1}{3} \left( \frac{t^6}{6} - \frac{2t^5}{5} \right) +$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{(x^3+2)^6}{6} - \frac{2(x^3+2)^5}{5} \right) + C$$

4

ب. ادغام جزو به جزو

مقبول جزو به جزو

$$\int u dv = uv - \int v du$$

در روش جزو به جزو عبارت داخل انتگرال به دو جزو  $u, dv$  تقسیم می شود و پس با قبول جزو به جزو انتگرال حاصل می شود. انتگرال حاصلی در هر روش جزو به جزو قابل حل است و با به حالت های زیر هستند:

1)  $\int (تابع\ x) \cdot (عبارت\ چندجمله\ ای) dx$

مثال  $\int (x^3 - 4x) e^{3x} dx$

2)  $\int (عبارت\ چندجمله\ ای) \alpha \left( \frac{\sin kx}{\cos kx} \right) dx$

مثال  $\int (x^2 + 4x) \sin 4x dx$

3)  $\int (عبارت\ چندجمله\ ای) \alpha (تابع\ لگاریتمی) dx$

مثال  $\int x^5 \ln x dx$

4)  $\int (عبارت\ چندجمله\ ای) \alpha (توابع\ مثلثاتی\ معکوس) dx$

5)  $\int (توابع\ مثلثاتی) + (توابع\ معکوس) dx$

$$\int x^5 (x^3 + 2)^4 dx$$

سوال ۱

$$\text{توضیح } t = x^3 + 2 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

$$\int x^2 (x^3 + 2)^4 \frac{dt}{3}$$

$$t = x^3 + 2$$

$$x^3 = t - 2$$

جایگزینی مجدد با متغیر جدید t

$$\int (t-2) t^4 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int (t-2) t^4 dt$$

$$= \frac{1}{3} \int (t^5 - 2t^4) dt = \frac{1}{3} \left( \frac{t^6}{6} - \frac{2t^5}{5} \right) +$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{(x^3+2)^6}{6} - \frac{2(x^3+2)^5}{5} \right) + C$$

4

تجزیه و تحلیل در دو صورت (1) و (2) به این صورت

$$\int (x^3 - 4x) e^{2x} dx$$

$x^3 - 4x$	$e^{2x}$	$\frac{1}{2}$
$\ominus 3x^2 - 4$	$\searrow$	$\frac{1}{2} e^{2x}$
$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} e^{2x}$
$\ominus 6x$	$\searrow$	$\frac{1}{2} e^{2x}$
$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} e^{2x}$
$\ominus 6$	$\searrow$	$\frac{1}{2} e^{2x}$
$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} e^{2x}$

$$\begin{aligned} \text{جواب} &= (x^3 - 4x) \left( \frac{1}{2} e^{2x} \right) - \frac{1}{2} (3x^2 - 4) e^{2x} \\ &+ \frac{6}{2} x e^{2x} - \frac{6}{2} e^{2x} + C \end{aligned}$$



$$\int (x^2 + 4x) \sin^2 x \, dx$$

حل

$x^2 + 4x$  (مشتق)  $\rightarrow$   $\sin^2 x$  (التي)

$\ominus 2x + 4$   $\rightarrow -\frac{1}{4} \cos 2x$

$2$   $\rightarrow -\frac{1}{14} \sin 2x$

$0$   $\rightarrow \frac{1}{47} \cos 2x$

$$\begin{aligned} \text{حـ} &= -\frac{1}{4} (x^2 + 4x) \cos 2x + \frac{1}{14} (2x + 4) \sin 2x \\ &+ \frac{2}{47} \cos 2x + C \end{aligned}$$

$$\int x^5 \ln x \, dx$$

$\ln x$  (مشتق)  $\rightarrow$   $x^5$  (التي)

$-\int \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x^4}{4}$

$$\text{حـ} = (\ln x) \left( \frac{x^4}{4} \right) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} \, dx$$

$$= (\ln x) \left( \frac{x^4}{4} \right) - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx$$

$$\text{حـ} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{16} \cdot \frac{x^4}{4} + C$$

روش لوم ← تجزیه کرده

در این روش مولد برای آنهایی که عجز قابل تجزیه به عامل های اول و یا صدها که در دو مستند همگامی رد شده قابل ذکر این است که باید در عبارت صورت از درم عجز که باشد در غیر این صورت باید صورت را به عجز تقسیم کنیم تا به نرم مطلوب درآید.

$$\int \frac{4x-4}{x^2-4} dx \quad \text{مثال}$$

$$\frac{4x-4}{x^2-4} = \frac{4x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

A و B مجهول اما ثابت هستند A, B را می توان به روش عجز

یادداشت جایگذاری صورت آورده

$$\frac{4x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$x=2 \rightarrow A = \frac{4(2)-4}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{4x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$x = -2 \rightarrow \frac{4(-2)-4}{-2-2} = \frac{-12}{-4} = 3$$

کلیه انتگرال‌های زیر را حل کنید

$$\int \left( \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2} \right) dx = \ln|x-2| + 3\ln|x+2| + C$$

میزان  $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C$

تمرین: انتگرال‌های زیر را حل کنید

۱)  $\int (5x^4 - 3x + \sqrt{x} + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + 1) dx$

۲)  $\int (5x-1)(2x^2+3x) dx$

۳)  $\int (e^{4x} - xe^{-x} + \sqrt{e^x}) dx$

۴)  $\int x^5 \sin 4x dx$

۵)  $\int x^4 e^{-x} dx$

۶)  $\int x \ln x dx$

۷)  $\int \frac{dx}{x^3-x}$

۸)  $\int \frac{x^2}{x^2+x} dx$

۹)  $\int x^2 \sqrt{x^2+1} dx$

۱۰)  $\int x \tan^{-1} x dx$

۱۱)  $\int \sin^n x \cos x dx$

موفق باشید